ＭＢ　関数解析学　線形作用素の理論　講義報告[6]

２００８年7月１９日（土）　１４：００－１６：００

閉作用素を定義し、その性質について調べた。

定義 1.12 (閉作用素). $(E, \| \, \|_E)$, $(F, \| \, \|_F)$ を $Banach$空間、E から F への線形作用素 T が与えられているとき、

$$\| \, \|_T : D(T) \ni u \to \|u\|_E + \|T(u)\|_F \in \mathbb{R}_+$$

このノルムを T に関する**グラフ・ノルム**という。ノルム空間 $(D(T), \| \, \|_T)$ が完備なとき、T を**閉作用素**という。

定理 1.6. $(E, \| \, \|_E)$, $(F, \| \, \|_F)$ を $Banach$空間 とするとき、E から F への線形作用素 T が閉作用素であるための必要十分条件は、点列 $\varphi : \mathbb{N} \to D(T)$ が $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = v_0$ でかつ、$\lim_{n\to\infty} T(\varphi(n)) = w_0$ を満たすならば、$v_0 \in D(T)$ でかつ、$T(v_0) = w_0$ が成立することである。

$(E, \eta_E), (F, \eta_F)$ を ノルム空間 とするとき、E と F の直積空間

$$E \times F = \{(v, w) \mid v \in E, \ w \in W\}$$

において、加法とスカラー倍を

1. $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ for $\forall v_1, v_2 \in E, \ \forall w_1, w_2 \in F$　　（加法）
2. $\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w)$ for $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in E, \ \forall w \in F$　　（スカラー倍）

により定義することにより、直積空間 $E \times F$ は線型空間になる。次に。直積空間 $E \times F$ に近傍系を次の様にして入れる。

$$V \in \mathfrak{V}_{E\times F}((v_0, w_0)) \Leftrightarrow \exists r > 0 \quad \text{such that} \quad rB^{\eta_E}(v_0) \times rB^{\eta_F}(w_0) \subset V$$

ただし、$B^{\eta_E}(v_0) = \{v \in E \mid \eta_E(v - v_0) \le 1\}$, $B^{\eta_F}(w_0) = \{w \in F \mid \eta_F(w - w_0) \le 1\}$ とする。この近傍系で決定する位相を $E \times F$ の**直積位相**と言う。

練習問題 1.12. $\{\mathfrak{V}_{E\times F}((x, y))\}_{(x,y)\in E\times F}$ は近傍系の公理をみたすことを示せ。

練習問題 1.13. $(E, \eta_E), (F, \eta_F)$ を ノルム空間 とする。直積空間 $E \times F$ の任意の元 $(v, w) \in E \times F$ に対して、

$$\|(v, w)\|_1 = \eta_E(v) + \eta_F(v), \quad \|(v, w)\|_\infty = \max\{\eta_E(v), \eta_F(v)\}$$

とするとき、

1. $\| \, \|_1$, $\| \, \|_\infty$ はノルムになることを示せ。

2. ノルム $\| \, \|_1$, $\| \, \|_\infty$ は同値になることを示せ。

[6]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

3. ノルム $\| \|_\infty$ による位相は直積位相に等しいことを示せ。

定理 1.7. $(E, \| \|_E), (F, \| \|_F)$ を *Banach*空間、T を E から F への線形作用素とするとき、

$$\Gamma(T) = \{(u, T(u)) \mid u \in D(T)\} \subset E \times F$$

を T **のグラフ**という。このとき、T が閉作用素であるための必要十分条件は、$\Gamma(T) \subset E \times F$ が閉集合になることである。

記録 by J.S